Universidade Federal de Lavras

Departamento de Estatística

Prof. Daniel Furtado Ferreira

1ª Aula Prática **Técnicas de somatório**

Notação e propriedades:

1) Variáveis e índices: o símbolo x_j (leia x índice j) representa qualquer um dos n valores x_1, x_2, ..., x_n resultantes da mensuração de uma variável aleatória X na amostra (conjunto de dados). A letra j, usada como índice, indica um dos possíveis valores, de 1 a n, da variável aleatória. Assim, por exemplo, se for considerada uma amostra de tamanho $n = 3$ de coelhos ao abate aos noventa dias e se X representa uma variável relativa ao peso em kg, então uma possibilidade de resultados é: 2,56, 2,43 e 2,60. Logo, $x_1 = 2{,}56$, $x_2 = 2{,}43$ e $x_3 = 2{,}60$. Os valores da variável aleatória são representados por letras minúscula e as variáveis aleatórias em si, por letras maiúscula.

2) Notação de somatório: para representarmos a soma de n variáveis aleatórias podemos utilizar o símbolo $\sum$, letra grega maiúscula *sigma*. Assim, a soma $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ pode ser sintetizada por $\sum_{j=1}^{n} x_j$, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

A variação do índice j pode não ir de 1 a n, mas estar em qualquer subintervalo desses limites.

3) Algumas propriedades:

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} ax_j = ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n = a\sum_{j=1}^{n} x_j;$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \neq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right);$

c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (ax_j + by_j) = a\sum_{j=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n} y_j;$

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} k = nk,$

em que a, b e k são constantes.

Exercícios propostos:

1) Considere as amostras de tamanho $n = 5$ dadas por:

$$\text{X} = [2,\ 6,\ 4,\ 7,\ 10]$$
$$\text{Y} = [42,\ 82,\ 79,\ 31,\ 55]$$

obter:

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} x_j$ *b)* $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} y_j$ *c)* $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} 2x_j^2$

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_j y_j$ *e)* $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} (3x_j + 2y_j)$ *f)* $\displaystyle\sum_{j=2}^{4} x_j y_j + \sum_{j=1}^{5} y_j^2$

2) Considere

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n} \qquad \text{e} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2}{n}\right],$$

os estimadores da média e da variância populacionais, respectivamente, obtidos em uma amostra aleatória de tamanho n. Considerando os dados $X = \{2, 4, 5, 6, 1, 8\}$, calcular a média e a variância.

3) Mostrar numericamente, a partir do conjunto $X = [1,\ 3,\ 2]$ e de forma algébrica, para qualquer amostra de tamanho n, que $\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}) = 0$.

4) Demonstrar que o valor de

$$Q = \frac{\sum_{j=1}^{n} (X_j - A)^2}{n-1}$$

representa um ponto de mínimo se o valor de A for igual a $\bar{X}$. Representar em um gráfico o esboço da função Q.

5) Criar um conjunto de valores de tamanho $n = 3$ para que a seguinte igualdade se verifique:

$$Q = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(X_j - \bar{X}\right)^2}{n-1} = 0.$$

6) Desenvolver a expressão

$$Q = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(X_j - \bar{X}\right)^2}{n-1}$$

considerando as propriedades de somatório e mostrar que $Q = S^2$. A partir deste resultado e daquele obtido no exercício 5, qual é o significado e interpretação você atribui à variância S^2?

Resolução

1) Sejam as amostras de tamanho $n = 5$ dadas por:

$$\text{X} = [2,\ 6,\ 4,\ 7,\ 10]$$
$$\text{Y} = [42,\ 82,\ 79,\ 31,\ 55]$$

então:

a) $\sum_{j=1}^{4} x_j = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$;

b) $\sum_{j=1}^{5} y_j = y_1 + \ldots + y_5 = 289$;

c) $\sum_{j=1}^{5} 2x_j^2 = 2\sum_{j=1}^{5} x_j^2 = 410$;

d) $\sum_{j=1}^{5} x_j y_j = 1659$;

e) $\sum_{j=1}^{5}(3x_j + 2y_j) = 3\sum_{j=1}^{5} x_j + 2\sum_{j=1}^{5} y_j = 665$; e

f) $\sum_{j=2}^{4} x_j y_j + \sum_{j=1}^{5} y_j^2 = 19740$.

2) Considerando o conjunto de dados $X = \{2, 4, 5, 6, 1, 8\}$ a média e a variância são:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n} = 4{,}3333 \text{ e}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2}{n}\right] = 6{,}6667$$

3) Mostrar numérica e algebricamente que as somas de desvios em relação a média aritmética é nula, qualquer que seja a amostra.

a) Numericamente

A média é igual a $\bar{X} = 2$, assim

$\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}) = (1-2) + (3-2) + (2-2) = -1 + 0 + 1 = 0;$

b) algebricamente

$$\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}) = \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} \bar{X} = \sum_{j=1}^{n} X_j - n\bar{X}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{\cancel{n}\sum_{j=1}^{n} X_j}{\cancel{n}} = \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} X_j = 0 \qquad \text{C.Q.M.}$$

4) Expandindo o somatório e derivando Q em relação a A tem-se:

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - A)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j^2 - 2AX_j + A^2)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2 - \sum_{j=1}^{n}2AX_j + \sum_{j=1}^{n}A^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2 - 2A\sum_{j=1}^{n}X_j + nA^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dQ}{dA} = \frac{1}{n-1}\left(-2\sum_{j=1}^{n}X_j + 2nA\right)
$$

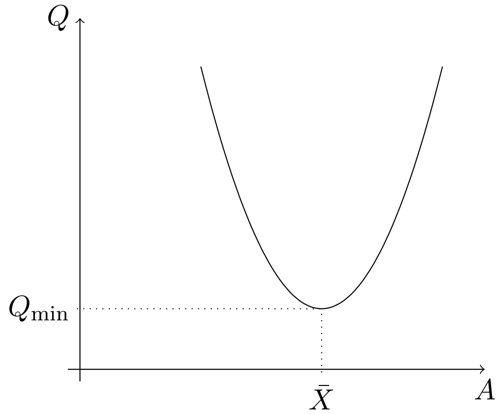
Igualando a derivada a zero, e resolvendo em relação a A, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ}{dA} &= \frac{1}{n-1}\left(-2\sum_{j=1}^{n}X_j + 2nA\right) = 0\\
2nA &= 2\sum_{j=1}^{n}X_j\\
A &= \frac{\sum_{j=1}^{n}X_j}{n} = \bar{X}
\end{aligned}
$$

O ponto ótimo, obtido igualando a derivada primeira a zero, pode ser de máximo, de mínimo ou de inflexão. Para certificar-se de que o valor de Q é um valor mínimo, quando A é igual à média amostral, basta mostrar que a segunda derivada é positiva. A segunda derivada de Q em relação a A é dada por:

$$
\frac{d^2Q}{dAdA} = \frac{2n}{n-1} > 0
$$

ou seja, a segunda derivada para qualquer tamanho de amostra será positiva, ficando concluída assim a demonstração. Veja o gráfico da função a seguir, em que $Q_{min} = S^2$.



5) Para que o somatório em questão seja nulo é necessário que cada parcela seja igual a zero. Para isso acontecer é preciso que cada valor x_j seja igual a média da amostra, ou seja, $x_j = \bar{X}$. Assim, concluímos

que os n valores da amostra têm de ser iguais. Logo, podemos construir quaisquer amostra de tamanho $n = 5$ com valores iguais, como, por exemplo, $X = \{1,1,1,1,1\}$.

6) Desenvolvendo

$$
\begin{aligned}
Q =& \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j^2 - 2\bar{X}X_j + \bar{X}^2) \\
=& \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \sum_{j=1}^{n} 2\bar{X}X_j + \sum_{j=1}^{n}\bar{X}^2\right) \\
=& \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - 2\bar{X}\sum_{j=1}^{n} X_j + n\bar{X}^2\right) \\
=& \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - 2\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j + n\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}\right)^2\right] \\
=& \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 - \frac{2\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2}{n} + \frac{\cancel{n}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2}{n^{\cancel{2}}}\right] \\
=& \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2}{n}\right] = S^2
\end{aligned}
$$

Assim, a variância é função da soma de quadrados de desvios em relação a média e é um valor mínimo, se for considerada outra constante no lugar da média. Se tomarmos Q como uma função de A, que representa uma parábola, a variância representa o ponto de mínimo desta parábola, quando $A = \bar{X}$. A variância é tanto menor, próximo de zero, quanto maior for a semelhança dos dados amostrais, ou seja, será próxima de zero em amostras com pouca variação. Crescerá para infinito, quando as diferenças entre os elementos da amostra aumentar.